تسعير أخطار الشركات الصناعية

" دراسة تطبيقية"

الأستـــاذ الدكتـــور

محمد عبد المولي عثمان

أستاذ الرياضيات والإحصاء الاكتوارى

كلية التجارة – جامعة طنطا

الأستـاذ الدكتـور

محمد المهدي علي

أستاذ الرياضيات والإحصاء الاكتوارى

كلية التجارة ببورسعيد – جامعة قناة السويس

الأستـــاذ الدكتـــور

محمود سيد أحمد سالم

أستاذ الرياضيات والإحصاء الاكتوارى

كلية التجارة – جامعة كفر الشيخ

حامد عبد القوى محمد الخواجة

مدرس مساعد

كلية التجارة – جامعة طنطا

أولاً: المقدمة :

تطـــور الاقتصـــاد في جمهورية مصر العربية تطوراً ملحوظاً فى عدد وحجم المشروعات التجارية والصناعية والخدمية ، وقد واكب هذا التطور الكبير فى مخـــتلف أوجه النشاط الاقتصادي زيادة فى حجم الخسائر ومعدلات تكرارها ، ومـــن ثم أصبح من الضروري في تأمينات الممتلكات توفير صور جديدة من التغطـــيات التأمينية في شكل وثائق مركبة تسمح بتغطية أكثر من خطر بجانب الوثائق الفردية التي تغطى خطراً واحداً .

لهـــذا تعـــد وثيقة التأمين المركبة أو متعددة الأخطار Multiple peril Policy نوعـــا جديداً من أنواع التغطيات التأمينية لا يندرج تحت أنواع التأمين التقليدية باعتـــبارها تمثل تغطية متكاملة لمجموعة من الأخطار لها خبرتها الخاصة في سوق التأمين.

ويقصـــد بوثيقة التأمين المركبة Package policy تلك الوثيقة التى تغطي أكثر من خطر واحد أى الوثيقة متعددة الأخطار ، وبمعنى آخر هي وثيقة مكونة من توليفة من عدة أخطار مناسبة لتلبية حاجة المؤمن له ،وبمقتضاها يمكن للأخير تغطية عدة أخطار في وثيقة واحدة وبقسط واحد.(١)

ومن خلال البحث الميداني تبين عدم التزام شركات التأمين بالتعريفة المحددة للتسعير الواردة من الخارج بحجة أنها لا تمثل خبرة السوق المصري ، مما أثر سلباً على شركات التأمين حيث تدخل فى تحديد السعر عامل مؤثر هو المنافسة الشديدة والضارة بين الشركات للحصول على الأخطار دون التركيز على العوامل الفنية الأساسية لكل ما يتعلق بالخطر وظروفه .

فضلاً عن ذلك وجد الباحثون أن هناك إحدى شركات التأمين المصرية تحتفظ لنفسها بنسبة لا تتعدي ٥% من قيمة الخطر ، وتعيد تأمين باقي الخطر على المستوى المحلى والعالمي كما يتضح من خلال النسب الواردة لنصيب هذه

---

(١) ســامية ســعد زغلول شاهين ، نحو بناء نموذج لوثيقة تأمين ممتلكات شاملة ، كلية التجارة – جامعة المنصورة ، رسالة دكتوراه ، ١٩٩٤ ، ص ٢٤ .

الشركة (المؤمن المباشر) واتفاقيات إعادة التأمين لإحدى العمليات التأمينية التى أبرمتها الشركة في عام ٢٠٠٠ كما هو مبين لنا في الجدول الآتي:[١] .

جدول رقم (١)

بيان بحصص شركة التأمين المباشر وشركات إعادة التأمين لإحدى العمليات التأمينية

البيان	النسبة	المبلغ
حصة شركة التأمين المباشر	٤,٦٦%	٨٣٨,٨ جنيه
حصة الشركة المصرية لإعادة التأمين(الإلزامي)	٢٨,٦ %	٥١٤٨ جنيه
حصة اتفاقيات الفائض	١٦,٧٤%	٣٠١٣ جنيه
حصة إعادة التأمين الاختياري	٥٠%	٩٠٠٠ جنيه

وتفيد الدراسات الأكاديمية ضرورة اعتماد شركات التأمين على نتائج عملياتها وخبراتها الفعلية خلال السنوات السابقة فى دراسة معدلات الخسائر للأخطار المختلفة واستخدام تلك النتائج فى تقدير التسعير الدقيق للتأمين، وإن كان هذا الأمر يعد ضرورياً للوثائق العادية فهو أكثر ضرورة للوثائق المركبة، ومن ثم فإن تسعير وثيقة التأمين المركبة بشكل علمي يمثل أمراً غاية فى الأهمية لكل من المؤمن له وشركات التأمين ، نظراً لما تمثله تلك الوثيقة من أهمية كبيرة لسوق التأمين .

ثانياً :مشكلة البحث

يعد التسعير العادل للخدمة التأمينية مطلباً أساسياً لتأمين الممتلكات بصفة عامة ولوثيقة التأمين المركبة بصفة خاصة ، حيث هناك حاجة ماسة لمثل هذه الوثيقة الأخيرة لتغطية الأخطار التي تتعرض لها المنشآت الكبيرة(صناعية – زراعية- خدمية...الخ) ، فعلي سبيل المثال شركة مصر للغزل والنسيج بالمحلة الكبرى وهي احدي الشركات الصناعية الرائدة في صناعة الغزل والنسيج تتعرض لأخطار الحريق والسيارات والنقل البحري تقوم

(١) إدارة الحريق بإحدى شركات التأمين المصرية .

بتأميـــنها لدي شركة مصر للتأمين ، إلا أن هناك تذبذباً كبيراً بين الأقساط التي تدفعهـــا والتعويضـــات التي تحصل عليها من خلال استقراء معدلات الخسارة لنـــتائج عمليات التأمين لهذه الشركة خلال الفترة (1996/1997-2004/2005) ، والمبينة في جدول رقم (٢) التالي:-

جدول رقم (٢)

بيان بالأقساط والتعويضات ومعدل الخسارة لأخطار الحريق والسيارات والنقل البحرى للشركة خلال الفترة (1996/1997-2004/2005) بالجنيه المصرى.

السنة	الأقساط	التعويضات	معدل الخسارة
1996/1997	1695740.49	841536.71	0.119379932
1997/1998	3128235.75	373448.57	0.086004262
1998/1999	2342197	201438.925	0.034087039
1999/2000	5778466.34	196970.81	0.216757661
2000/2001	911852.94	197651.11	0.164306309
2001/2002	1225504.74	201358.16	0.213552458
2002/2003	2083278.39	444889.22	0.119971871
2003/2004	1081753.99	129780.05	0.014124994
2004/2005	1896468	26787.6	0.12976203
المجموع	20143497.64	2613861.155	1.097946556
متوسط معدل الخسارة			0.121994062

المصدر : سجلات شركة مصر للغزل والنسيج بالمحلة الكبرى

وباستقراء جدول رقم (٢) يتضح أن هناك فجوة كبيرة بين الأقساط التي تحصلها شركة التأمين والتعويضات التي تدفعها من خلال معدل الخسارة الذي بلغ في عام (2003/2004) ١,٤% في حين كان في عام (1999/2000) ٢١,٧% تقريباً ثم عاد للارتفاع مرة أخري في عام (2004/2005) حيث يبلغ ١٢,٩٨% . وفي ضوء ما سلف أصبح سوق التأمين المصري في حاجة ضرورية لتسعير وثائق التأمين المركبة التي تغطي مجموعة من الأخطار وفق أسلوب علمي يأخذ في الحسبان النماذج الرياضية والإحصائية للتسعير لتحقيق العدالة لطرفى التعاقد (المؤمن - المستأمن) .

ومن ثم تبرز مشكلة البحث وهي الإجابة علي السؤال التالي: كيف يتم تسعير وثائق التأمين المركبة لعدة أخطار في السوق المصرية وفقاً لأساليب علمية رياضية إحصائية ؟

ثالثاً : هدف البحث :

تهدف هذه الدراسة إلى التوصل إلى نموذج كمي باستخدام التوزيعات الاحتمالية لتقدير سعر عادل لوثيقة التأمين المركبة مع محاولة تطبيق النموذج علي الأخطار التي تتعرض لها احدي شركات قطاع الغزل والنسيج (شركة مصر للغزل والنسيج بالمحلة الكبري).

رابعاً :أهمية البحث :

تعد هذه الدراسة ضرورية ومهمة لسوق التأمين المصرية للأسباب الآتية:-

١-استخدام وثائق التأمين المركبة يؤدى إلى انخفاض تكلفتها التأمينية بالنسبة للمؤمن له بالمقارنة بتكلفة شراء وثائق فردية لكل خطر على حدة.

٢-تشجيع المؤمن له على استخدام وسيلة التأمين لإدارة الخطر مما يؤدي إلى زيادة عدد الوحدات المعرضة للخطر لدي شركات التأمين ، وبالتالي توافر الظروف المناسبة لقانون الأعداد الكبيرة .

٣-لاتتوافر مثل هذه الدراسات فى السوق المصرية الأمر الذى يجعل السوق عند تطبيقها فى حالة مناسبة للتنافس مع الأسواق الأخرى.

خامساً : حدود الدراسة :

١- **مجال التطبيق** : تم الاعتماد علي بيانات شركة مصر للغزل النســيج بالمحلة الكبرى وذلك لتسعير الأخطار التي تتعرض لها الشــركة وهي خطر الحريق ، وخطر السيارات ،وأخطار النقل البحري

٢- **الحــدود الزمنية** : تم الاعتماد على البيانات المتاحة لشركة مصر للغزل والنسيج باعتبارها تمثل قطاع الغزل والنسيج.خــــلال الفـــترة من 1993 / 1994 وحتى عام 2005 / 2006 وذلك للأخطار الثلاثة .

خطة البحث :

لتحقيق هدف البحث سوف يتم تقسيم البحث إلى المباحث الآتية :

المبحث الأول: التوزيع الاحتمالي النظري لبيانات عدد الخسائر وحجمها.

المبحث الثاني: التوزيعات الحدية الثنائية للتوزيعات الاحتمالية المتقطعة والمتصلة.

المبحث الثالث : التوزيعات الاحتمالية المركبة الثنائية.

المبحث الرابع : تسعير أخطار الشركات الصناعية.

المبحث الأول

التوزيع الاحتمالي النظري لبيانات عدد الخسائر وحجمها

في كثير من الحالات نحتاج لتحديد التوزيع الاحتمالي النظري الأمثل والمناسب لتوزيع احتمالي معلوم من خلال اختبار جودة المطابقة للبيانات الفعلية ، علماً بأن تحديد التوزيع الاحتمالي النظري يتميز بتلخيص جميع البيانات المتعلقة بالتوزيع الفعلي في دالة رياضية واحدة يمكن من خلالها حساب جميع الاحتمالات المناظرة لقيمة معينة من قيم المتغير العشوائي .

أولاً : اختبار جودة المطابقة Fitting test :

لتحديد التوزيع النظري المناسب للتوزيع الفعلي لبيانات الخسائر يجب تقدير معالم التوزيع ، واختبار مدي تطابقها مع التكرارات الفعلية ، وبالتالي اتخاذ القرار بشأن مدي تطابق التوزيع النظري محل الاختبار مع التوزيع الفعلي،ويتم تحديد مدي مطابقة التوزيع النظري بالتوزيع الفعلي باستخدام الاختبارين التاليين:-

(أ) اختبار كا^{٢} لجودة المطابقة Chi-square Test (ب) اختبار كلموجروف سمير نوف Kolmogrov-smirnov test

والجدير بالذكر أن هذين الاختبارين عند استخدامهما في إجراء اختبارات جودة المطابقة يتطلبان عمليات حسابية طويلة وشاقة للوصول إلي قرار عدم وجود فرق جوهري بين التوزيع النظري والتوزيع الفعلي ، وذلك لأي توزيع سواء أكان هذا التوزيع توزيعاً احتمالياً متقطعاً أو مستمراً ، ولاختبار جودة المطابقة بين التوزيع الاحتمالي النظري والفعلي سيقوم الباحث باستخدام برنامجStatgraphics وحساب قيمة P-value ، واختيار القيمة ذات الاحتمال المشاهد الأكبر للتوزيع النظري في حالة خضوع البيانات الفعلية لأكثر من توزيع نظري ، ثم المفاضلة والترجيح بين هذه التوزيعات ،بإدخال البيانات

الفعلـــية في برنـامج Statgraphics ، لاختبارها باستخدام الاختبارات اللامعلمية الســـابق الإشـــارة إلـــيها (اختبار كا٢ – اختبار كلموجروف سميرنوف) ، تم التوصـــل إلي مدي اقتراب التوزيع الاحتمالي النظري من التوزيع الفعلي من خلال الاحتمال المشاهد p-value .

(١) اختبارات جودة المطابقة لعدد وحجم الخسائر لخطر الحريق :-

بإجراء اختبارات جودة المطابقة لعدد وحجم الخسائر لخطر الحريق من خلال برنامج Statgraphics لشركة مصر للغزل والنسيج والمبينة في الجدول التالي :

جدول رقم (٣)

بيان بعدد وحجم الخسائر لخطر الحريق

السنة	عدد الحوادث	حجم الخسائر
1996/1997	12	2647.25
1997/1998	10	6602.75
1998/1999	17	6182.95
1999/2000	23	4212.75
2000/2001	18	6608.35
2001/2002	31	4934.65
2002/2003	24	11715.35
2003/2004	24	2520.95
2004/2005	31	13303.15

المصدر : سجلات شركة مصر للغزل والنسيج

وباستخدام الفروض الإحصائية **لعدد الحوادث لخطر الحريق** التالية :

الفرض العدمي : البيانات تتبع توزيع بواسون.

الفرض البديل: البيانات لا تتبع توزيع بواسون

أسفرت الاختبارات عن أن قيمة الاحتمال المشاهد p-value = 0.178835 أكبر من 0.05% مما يعني قبول الفرض العدمي.

ولاختبار جودة المطابقة **لحجم الخسائر لخطر الحريق**

الفرض العدمي : البيانات تتبع التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي .

الفرض البديل: البيانات لاتتبع التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي .

بإدخال البيانات للحزمة الإحصائية Statgraphics plus تبين أن قيمة الاحتمال المشاهد p-value = 0.956932 أكبر من 0.05% مما يعني قبول الفرض العدمي

(٢) اختبارات جودة المطابقة لعدد وحجم الخسائر لخطر السيارات :-

بإجراء اختبارات جودة المطابقة لعدد وحجم الخسائر لخطر السيارات من خلال برنامج Statgraphics لشركة مصر للغزل والنسيج المبينة في الجدول التالي:-

جدول رقم (٤)

بيان بعدد وحجم الخسائر لخطر السيارات

السنة	عدد الحوادث	حجم الخسائر
1993/1994	25	58057
1994/1995	52	109437
1995/1996	38	22320
1996/1997	58	129470
1997/1998	48	49963.5
1998/1999	51	66643.8
1999/2000	101	52085
2000/2001	74	41607
2001/2002	76	58313
2002/2003	74	43826
2003/2004	69	42605
2004/2005	16	3709

المصدر : سجلات شركة مصر للغزل والنسيج

وباستخدام الفروض الإحصائية **لعدد الحوادث لخطر السيارات التالية :**

الفرض العدمي : البيانات تتوزع حسب توزيع ذي الحدين السالب .

الفرض البديل: البيانات لا تتوزع حسب توزيع ذي الحدين السالب.

أسفرت الاختبارات عن أن قيمة الاحتمال المشاهد p-value = 0.170766 أكبر من 0.05% مما يعني قبول الفرض العدمي.

لاختبار جودة المطابقة لحجم الخسائر لخطر السيارات

الفرض العدمي : البيانات تتبع توزيع وايبل

الفرض البديل : البيانات لا تتبع توزيع وايبل.

وبإدخـــال البيانات لحزمة إحصائية Statgraphics plus تبين أن قيمة الاحتمال المشـــاهد p-value = 0.5894062 أكـــبر مـــن 0.05% مما يعني قبول الفرض العدمي.

(٣)اختبار جودة المطابقة لعدد الحوادث لخطر النقل البحري :-

بإجراء اختبارات جودة المطابقة لعدد وحجم الخسائر لخطر الحريق من خلال برنامج Statgraphics لشركة مصر للغزل والنسيج المبينة في الجدول التالي:-

جدول رقم (٥)

بيان بعدد وحجم الخسائر لخطر النقل البحري

السنة	عدد الحوادث	حجم الخسائر
1992/1993	81	1578790.72
1993/1994	71	270274.35
1994/1995	50	1109753.41
1995/1996	36	756947.65
1996/1997	48	709419:46
1997/1998	51	316882.32
1998/1999	38	128612.175
1999/2000	29	140673.06
2000/2001	38	149435.76
2001/2002	20	138110.51
2002/2003	14	389347.87
2003/2004	13	84654.1
2004/2005	6	9775.45
2005/2006	2	10288.6

المصدر : سجلات شركة مصر للغزل والنسيج

وباستخدام الفروض الإحصائية لعدد الحوادث لخطر النقل البحري التالية:

الفرض العدمي : البيانات تتوزع حسب توزيع ذي الحدين السالب .

الفرض البديل: البيانات لا تتوزع حسب توزيع ذي الحدين السالب.

أسفرت الاختبارات عن أن قيمة الاحتمال المشاهد 0.519086 = p-value أكبر من 0.05% مما يعني قبول الفرض العدمي.

لاختبار جودة المطابقة لحجم الخسائر لخطر النقل البحري.

الفرض العدمي : البيانات تتوزع حسب توزيع جاما

الفرض البديل : البيانات لا تتوزع حسب توزيع جاما .

وبإدخال البيانات لحزمة إحصائية Statgraphics تبين أن قيمة الاحتمال المشاهد p-value = 0.933426 أكبر من 0.05% مما يعني قبول الفرض العدمي

ومما سلف يمكن تلخيص اختبارات جودة المطابقة لعدد الحوادث للأخطار الثلاثة (الحريق – والسيارات – والنقل البحري) كالتالي:

جدول (٦)

اختبارات جودة المطابقة لعدد الحوادث للأخطار الثلاثة

اسم الخطر	p-value	التوزيع الاحتمالي المناسب
خطر الحريق	0.178835	بواسون
خطر السيارات	0.170766	ذي الحدين السالب
خطر النقل البحري	0.519086	ذي الحدين السالب

ومما سلف يمكن تلخيص اختبارات جودة المطابقة لحجم الخسائر للأخطار الثلاثة (الحريق – والسيارات – والنقل البحري) كالتالي:

جدول (٧)

اختبارات جودة المطابقة لحجم الخسائر للأخطار الثلاثة

اسم الخطر	p-value	التوزيع الاحتمالي المناسب
خطر الحريق	0.956932	اللوغاريتمي الطبيعي
خطر السيارات	0.5894062	وايبل
خطر النقل البحري	0.933426	جاما

المبحث الثاني

التوزيعات الحدية الثنائية للتوزيعات الاحتمالية المتقطعة والمتصلة

نلاحـــظ في بعض الأحيان صعوبة في استنتاج التوزيعات الاحتمالية باستخدام مفهـــوم الدالة التوزيعية أو الدالة المولدة للعزوم، ومن ثم نلجأ إلي أسلوب آخر فـــي هذه الحالة هو استخدام التّحويلات Transformations في استنتاج التوزيع الاحتمالـــي[1] ،ويمكن بيان عملية دمج توزيعين احتماليين ، وإيجاد التوزيعات الاحتمالية الثنائية المتقطعة كالآتي :-

أولاً: التوزيعات الحدية الثنائية التوزيعات الاحتمالية المتقطعة.

(1) الـــتوزيع الحـــدي الثنائـــي مـــن توزيع بواسون مع توزيع ذي الحدين السالب.

بافتراض أن x تتبع توزيع بواسون بالمعلمة λ وأن y تتبع توزيع ذي الحدين السالب بالمعلمتين (r,p) وبافتراض أن x,y مستقلان .

$$p_1(x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} \quad ; x = 0,1,2,3,... \quad ;\lambda > 0. \qquad (1)$$

$$p_2(y) = c_{r-1}^{r+y-1} p^r q^y ; \; y = 0,1,2,3,... \quad ;r > 0; q = 1-p. \qquad (2)$$

إذاً دالـــة الاحـــتمال المشـــترك Joint probability function أو دالة التوزيع الإحتمالى المشترك Joint probability distribution للدالتين معاً

$$p(x,y) = p_1(x) p_2(y) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!} c_{r-1}^{r+y-1} p^r q^y \qquad (3)$$

وبافتراض أن

$u=x \Rightarrow x=u$

$z=x+y \Rightarrow y=z-u$

وبذلك يكون حدود المتغيرين z,u كالتالي:

---

[1] – أمير حنا هرمز ، الاحصاء الرياضي جامعة الموصل–العراق ، 1991 ، ص ص453:465.

$0 \leq u \leq z \prec \infty$

مع العلم أن u,z أرقام صحيحة موجبة .

ولتحويل دالة الاحتمال المشترك للمتغيرين x,y إلي المتغيرين u,z يتم الآتي:

$$p(u,z) = \frac{\lambda^u e^{-\lambda}}{u!} C_{r-1}^{r+z-u-1} p^r q^{z-u} \tag{4}$$

وإذا كـــان المطلـــوب إيجـــاد الـــتوزيع الاحتمالي الهامشي(الحدي) Marginal probability distribution للمتغـــيرz ويـــتم التجمـــيع علـــى حدود المتغير u كالتالي:

$$p_3(z) = \sum_{u=0}^{z} p(u,z)$$

$$p_3(z) = \sum_{u=0}^{z} \frac{\lambda^u e^{-\lambda}}{u!} C_{r-1}^{r+z+u-1} p^r q^{z-u}. \tag{5}$$

$$p_3(z) = e^{-\lambda} p^r q^z \sum_{u=0}^{z} C_{r-1}^{r+z-u-1} \frac{\lambda^u q^{-u}}{u!} \tag{6}$$

$$p_3(z) = e^{-\lambda} p^r q^z \sum_{u=0}^{z} C_{r-1}^{r+z-u-1} \frac{(\lambda/q)^u}{u!} \tag{7}$$

بوضع $w_1 = \frac{\lambda}{q}$ في المعادلة (7)

$$p_3(z) = e^{-\lambda} p^r q^z \sum_{u=0}^{z} C_{r-1}^{r+z-u-1} \frac{(w_1)^u}{u!} \tag{8}$$

والشــكل الناتج من المعادلة السابقة هو دالة الاحتمال الهامشي للمتغير z وهو عبارة عن دمج توزيعي بواسون وذي الحدين السالب .

ويوجد شكل آخر للمعادلة رقم (8) بحيث يكون كالتالي :

$$p_3(z)=e^{-\lambda}p^r q^z \sum_{u=0}^{z}\frac{\Gamma(r+z-u)}{\Gamma(r)\Gamma(z-u+1)}[\frac{(w_1)^u}{u!}]$$

حالة خاصة بافتراض أن r=1 للمعادلة رقم (8)

$$p_3(z)=e^{-\lambda}pq^z \sum_{u=0}^{z}\frac{(w_1)^u}{u!} \qquad (9)$$

بضرب البسط والمقام في e^{-w_1} ينتج أن

$$ppois(z,w_1)=\sum_{u=0}^{z}\frac{(w_1)^u e^{-w_1}}{u!}$$

لذا فإن $ppois(z,w_1)$ تمثل الدالة التوزيعية لتوزيع بواسون للمتغير u[2]

$$p_3(z)=e^{-\lambda}pq^z e^{w_1} ppois(z,w_1) \qquad (10)$$

المعادلة السابقة عبارة عن دالة كثافة الاحتمال للمتغير z الناتج عن دمج توزيع بواسون مع توزيع ذي الحدين السالب عندما r =1 .

(2) التوزيع الحدي الثنائي لتوزيع ذي الحدين السالب مع نفسه:

بافتراض أن x, y مستقلان فإن :-

$x : N.B(r_1,p_1)$

$y : N.B(r_2,p_2)$

---

[2] أمير حنا هرمز ،مرجع سابق ص 281.

$$p_1(x)=C_{r_1-1}^{r_1+x-1}p_1^{r_1}q_1^{x}\ ;x=0,1,2,3,..\ ;r_1 \text{ f } 0 \quad (11)$$

$$p_2(y)=C_{r_2-1}^{r_2+y-1}p_2^{r_2}q_2^{x} \quad (12)$$

$$y=0,1,2,3,..\ ;\quad r_2 \text{ f } 0.$$

وبالتالي فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للدالتين معاً كالتالي :

$$p(x,y)=C_{r_1-1}^{r_1+x-1}p_1^{r_1}q_1^{x}C_{r_2-1}^{r_2+y-1}p_2^{r_2}q_2^{y}; \quad (13)$$

$$q_1=1-p_1; q_2=1-p_2.$$

من المعادلة السابقة يمكن إيجاد التوزيع الهامشي(الحدي) للمتغير الجديدz

والتجميع علي حدود u كالأتي :

$$p_3(z)=p_1^{r_1}p_2^{r_2}q_2^{z}\sum_{u=0}^{z}\left[C_{r_1-1}^{r_1+u-1}C_{r_2-1}^{2+z-u-1}q_1^{u}q_2^{-u}\right] \quad (14)$$

وبإجراء بعض الاختصارات علي المعادلة السابقة نستنتج المعادلة الآتية:

$$p_3(z)=p_1^{r_1}p_2^{r_2}q_2^{z}\sum_{u=0}^{z}\left[C_{r_1-1}^{r_1+u-1}C_{r_2-1}^{r_2+z-u-1}(q_1/q_2)^{u}\right] \quad (15)$$

$$w_2=q_1/q_2$$

$$p_3(z)=p_1^{r_1}p_2^{r_2}q_2^{z}\sum_{u=0}^{z}\left[\binom{r_1+u-1}{r_1-1}\binom{r_2+z-u-1}{r_2-1}(w_2)^{u}\right] \quad (16)$$

والمعادلة السابقة هي الشكل النهائي من التوزيع الحدي الثنائي **من** دمج توزيع ذي الحدين السالب مع توزيع ذي الحدين السالب أيضاً.،

ويوجد شكل آخر للمعادلة السالفة رقم (16).

$$p_3(z)=p_1^{r_1}p_2^{r_2}q_2^{z}\sum_{u=0}^{z}\left[\frac{\Gamma(r_1+u)}{\Gamma(r_1)\Gamma(u+1)}\frac{\Gamma(r_2+z-u)}{\Gamma(r_2)\Gamma(z-u+1)}(w_2)^{u}\right]$$

حالة خاصة بافتراض أن $r_1=1$ & وأن $r_2=1$ في المعادلة رقم (17)

$$p_3(z)=p_1 p_2 q_2^z \left[\sum_{u=0}^{z}(w_2)^u\right] \qquad (17)$$

$$p_3(z)=p_1 p_2 q_2^z \frac{(w_2)^{z+1}-1}{w_2-1} \qquad (18)$$

والمعادلـــة (18) هي الشكل النهائي الناتج من دمج توزيع ذي الحدين السالب مع نفسه وذلك للحالة الخاصة $r_1=1$ & $r_2=1$.

ثانياً: التوزيعات الحدية الثنائية للتوزيعات الاحتمالية المتصلة

سيحاول الباحث في هذا المبحث دمج التوزيعات المتصلة التي تتبعها متغيرات الأخطار الثلاثة (خطر الحريق ، وخطر السيارات ، والخطر البحري)، ولكي يمكن استنتاج التوزيع الحدي الثنائي للتوزيعات المتصلة سوف تستخدم طريقة التحويلات كالآتي:

التحويلات Transformations [1] للمتغيرات المتصلة

إذا كـــان x,y متغيريـــن عشوائيين لهما توزيع احتمالي مشترك معلوم ،و دالة كـــثافة احـــتمالهما معاً هي f (x,y) وبفرض وجود متغيرين آخرين هما z,u تربطهما بالمتغيرين x,y العلاقتان

والمطلوب هو إيجاد دالة كثافة الاحتمال المشترك للمتغيرين z,u بمعني إيجاد دالـــة كثافة الاحتمال الهامشي (الحدي) لأي من المتغيرين z أو u كما يتضح من المعادلة الآتية :-

---

(1) أ- جلال مصطفي الصياد ،نظرية الاحتمالات ، جامعة الملك عبد العزيز ،السعودية،1986 ، ص ص 293-304.

ب- عبد الله توفيق الهلباوي ، مقدمة في نظرية الإحصاء" ،2003، كلية التجارة – جامعة حلوان ، ص ص319-334.

ج- جلال مصطفي الصياد ،"الاستدلال الإحصائي" ، جامعة الملك عبد العزيز ،السعودية ، 1992، ص ص72-74.

- Micheal, "probability The science of uncertainty with Applications to Investments, Insurance, and Engineering", Ph.D., FSA, university of Western ontario,2002 . ,p.280-297.

– Horst Behncke , , "Insurance Mathematics A European Model", University of Osnabruck, 2000 ,p.200.

$$f(u,z)=f(x,y)\left|J\right|$$

حيـــث يســـمي هذا المقدار $\left|J\right|$ جاكوبيان Jacobian أو معامل التحويل،وهو عبارة عن محدد من الرتبة الثانية للتفاضلات الجزئية بين المتغيرات

$$\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,z)}\right|=\begin{vmatrix}\frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial z}\\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial z}\end{vmatrix}$$

ثـــم نأخذ القيمة الموجبة لهذا المحدد ،وإذا كان المطلوب بعد ذلك هو الحصول علـــي دالـــة كثافة الاحتمال الهامشى لأي من المتغيرين z,u فإننا نكامل دالة كثافة الاحتمال المشترك بينهما بالنسبة للمتغير الآخر أي أن

$$f_1(u)=\int_z f(u,z)dz$$

$$f_2(z)=\int_u f(u,z)du$$

وبـــنفس الأسلوب يمكن إيجاد دالة كثافة الاحتمال الهامشى (الحدي) لأكثر من متغيرين،ومـــن ثم يمكن بيان عملية دمج توزيعين احتماليين أو ثلاثة توزيعات احتمالـــية ،ولإيجـــاد الـــتوزيعات الاحتمالية الحدية الثنائية للتوزيعات المتصلة كالآتي :-

(1) الـــتوزيع الحـــدي الثنائي لتوزيع جاما مع توزيع اللوغاريتمي الطبيعي (جاما- اللوغاريتمي الطبيعي) :- بافتراض أن x متغير عشوائي متصل يتبع توزيـــع اللوغاريتمي الطبيعي $x\,:\,Lognormal(\mu,\sigma^2)$ ، وأن y متغير عشوائي متصل يتبع توزيع جاما $y\,:\,Gamma(n,\theta)$

حيث دالة كثافة المتغير الأول هي :-

$$f_1(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma x} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - \mu)^2} \quad ;\ x \ f \ 0 \qquad (19)$$

ودالة كثافة المتغير الثاني هي :-

$$f_2(y) = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} y^{n-1} e^{-\theta y} \quad ; y \ f \ 0 \qquad (20)$$

وبالتالي فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين Joint probability density function

$$f(x,y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma x} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x - \mu)^2} . \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} y^{n-1} e^{-\theta y} \qquad (21)$$

وبافتراض أن :-

$$x = u \Rightarrow u = x$$

$$z = x + y \Rightarrow y = z - u$$

$$0 \ p \ u \ p \ z \ p \ \infty$$

وبإجراء تحويلة خطية باستخدام التفاضلات الجزئية

للمتغيرين x,y بالنسبة للمتغيرين z,u [1].

نجد أن :-

$$f(u,z) = f(x,y)|J|$$

بالتالي فإن :-

$$|J| = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial z} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial z} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

ثم بإجراء التعويض في المعادلة (21) بقيم x,y تنتج المعادلة الآتية:

---

[1] - أمير حنا هرمز ،مرجع سابق ،ص .ص،458-466.

- جلال مصطفي الصياد ، مرجع سابق ،ص .ص،296-304.

$$f(u,z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma u}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln u-\mu)^2}\frac{\theta^n}{\Gamma(n)}(z-u)^{n-1}e^{-\theta(z-u)}|J| \quad (22)$$

ويتم إيجاد التوزيع الهامشي للمتغير z ونكامل علي حدود المتغير u كالتالي:

$$g(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{\theta^n}{\Gamma(n)}e^{-\theta z}\int_0^z\frac{1}{u}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln u-\mu)^2}(z-u)^{n-1}e^{\theta u}du \quad (23)$$

$$g(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{\theta^n}{\Gamma(n)}e^{-\theta z}\int_0^z\frac{(z-u)^{n-1}}{u}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln u-\mu)^2+\theta u}du \quad (24)$$

بالتعويض في المعادلة السابقةعن $A_1=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{\theta^n}{\Gamma(n)}$

$$g(z)=A_1e^{-\theta z}\int_0^z\frac{(z-u)^{n-1}}{u}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln u-\mu)^2+\theta u}du \quad (25)$$

وهــذه المعادلة (25) هي دالة كثافة الاحتمال للمتغير الجديد z ، وهو يمثل التوزيع الثنائي الحدي الناجم من دمج توزيع جاما مع توزيع اللوغاريتمي الطبيعى .

(2) التوزيع الثنائي الحدي لتوزيع اللوغاريتم الطبيعى مع توزيع وايبل (وايبل - اللوغاريتم الطبيعى) :بافتراض أن x متغير عشوائي يتبع توزيع اللوغاريتم الطبيعى $x : Lognormal(\mu,\sigma^2)$ وأن y متغير عشوائي يتبع توزيع وايبل $: y : weibull(\eta,\beta)$

حيث دالة كثافة اللوغاريتم الطبيعي هي

$$f_1(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma x}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x-\mu)^2} \quad ; \quad x \text{ f } 0 \quad (26)$$

ودالة كثافة وايبل هي :

$$f_2(y)=\frac{\beta}{\eta^{\beta}}.y^{\beta-1}e^{-(y/\eta)^{\beta}} \quad ; \quad y \text{ f } 0 \qquad (27)$$

لذا فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للتوزيعين

$$f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma x}e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln x-\mu)^2}\ \frac{\beta}{\eta^{\beta}}\,y^{\beta-1}e^{-(y/\eta)^{\beta}} \qquad (28)$$

ويـــتم إيجـــاد التوزيع الهامشي (الحدي) للمتغير z بإجراء التكامل علي حدود المتغير u كالتالي:

$$g(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\ \sigma}\frac{\beta}{\eta^{\beta}}\int_0^z \ ((z-u)^{\beta-1}/u)e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln u-\mu)^2}\ e^{-((z-u)/\eta)^{\beta}}du \ (29)$$

وبإجراء بعض الاختصارات علي المعادلة السابقة تنتج المعادلة (30) التالية :

$$g(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\frac{\beta}{\eta^{\beta}}\int_0^z((z-u)^{\beta-1}/u)e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln u-\mu)^2-((z-u)/\eta)^{\beta}}\ du(30)$$

لذا فإن الدالة التالية

$$g(z)=A_2\int_0^z((z-u)^{\beta-1}/u)e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln u-\mu)^2-((z-u)/\eta)^{\beta}}\ du \quad (31)$$

هـــي دالة كثافة الاحتمال للمتغير الجديد z ،وهو يمثل التوزيع الثنائي الحدي، والناتج من دمج توزيع وايبل مع توزيع اللوغاريتمي الطبيعي.

(3) الـــتوزيع الثنائـــي الحدي لتوزيع (جاما- وايبل) :بافتراض أن x متغير عشـــوائي يتـــبع توزيع وايبل $x\ :\ weibull(\eta,\beta)$ وأن y متغير عشوائي يتبع توزيع جاما $y\ :\ Gamma(n,\theta)$، حيث دالة كثافة توزيع وايبل هي

$$f_1(x)=\frac{\beta}{\eta^{\beta}}x^{\beta-1}e^{-(x/\eta)^{\beta}} \;;\; x \text{ f } 0 \tag{32}$$

ودالة كثافة توزيع جاما هي :-

$$f_2(y)=\frac{\theta^{n}}{\Gamma(n)}y^{n-1}e^{-\theta y} \;;\; y \text{ f } 0 \tag{33}$$

لذا فإن دالة كثافة الاحتمال المشتركة للمتغيرين x,y.

$$f(x,y)=\frac{\beta}{\eta^{\beta}}x^{\beta-1}e^{-(x/\eta)^{\beta}}\frac{\theta^{n}}{\Gamma(n)}y^{n-1}e^{-\theta y} \tag{34}$$

$$f(u,z)=\frac{\beta}{\eta^{\beta}}x^{\beta-1}e^{-(x/\eta)^{\beta}}\frac{\theta^{n}}{\Gamma(n)}y^{n-1}e^{-\theta y}\,|J| \tag{35}$$

ثم بالتعويض في المعادلة (36) عن قيم x,y تنتج المعادلة (37) التالية:-

$$f(u,z)=\frac{\beta}{\eta^{\beta}}u^{\beta-1}e^{-(u/\eta)^{\beta}}\frac{\theta^{n}}{\Gamma(n)}(z-u)^{n-1}e^{-\theta(z-u)}|J| \tag{36}$$

ويتم إيجاد التوزيع الهامشي (الحدي) للمتغير z بإجراء التكامل علي حدود المتغير .u

$$g(z)=\frac{\beta}{\eta^{\beta}}\frac{\theta^{n}}{\Gamma(n)}e^{-\theta z}\int_{0}^{z}(z-u)^{n-1}u^{\beta-1}e^{-(u/\eta)^{\beta}}e^{\theta u}du \tag{37}$$

لذا فإن الدالة التالية تكون :-

$$g(z)=A_3e^{-\theta z}\int_{0}^{z}(z-u)^{n-1}u^{\beta-1}e^{\theta u-(u/\eta)^{\beta}}du \tag{38}$$

هي دالة كثافة الاحتمال للمتغير الجديد z ، والذي يمثل التوزيع الثنائي الحدي المطلوب إيجاده، والناتج من دمج توزيع وايبل مع توزيع جاما .

وبعـــد التوصـــل لـــدوال كثافة الاحتمال الثنائية الناجمة من دمج التوزيعات الاحتمالية (المتقطعة المستمرة) يتم في المبحث القادم ما يلي :-

أ- تقدير معالم دوال كثافة الاحتمال.

ب- اســتنباط التوزيعات الاحتمالية المركبة عن طريق دمج التوزيعات الاحتمالية الحدية الثنائية واستخدامها في عملية التسعير .

المبحث الثالث

التوزيعات الاحتمالية المركبة الثنائية للأخطار الثلاثة

يتم في هذا المبحث إيجاد التوزيع المركب الناجم من دمج التوزيعات الاحتمالية المتقطعة مع التوزيعات الاحتمالية المتصلة ، وتقدير معالم التوزيع المركب، وذلك لاستخدامها في عملية التسعير في المبحث القادم ، وذلك من خلال معرفة ما يلى:-

1- المعادلة التفاضلية لكارل بيرسون لإيجاد التوزيع المركب المناسب

أعد كارل بيرسون منحنيات ، وأطلق عليها منحنيات بيرسون أوعائلة بيرسون ، وهذه المنحنيات تعتمد بالدرجة الأولى على معاملات الالتواء والتفرطح ، وباستخدام المعادلة التفاضلية لكارل بيرسون يمكن إيجاد التوزيع المركب المناسب من خلال معادلات العزوم الأربعة (1) المركبة لإيجاد التوزيع المركب (المتقطع مع المتصل) ، حيث يرمز للتوزيع الاحتمالي المتقطع بالرمز n، والتوزيع الاحتمالي المتصل بالرمز s ، والمعادلات الأربع يمكن بيانها كالتالي :-

$$M_1 = mn_1.ms_1$$

$$M_2 = (ms_1)^2.mn_2 + mn_1.ms_2$$

$$M_3 = (ms_1)^3.mn_3 + mn_1.ms_3 + 3ms_1.ms_2.mn_2$$

$$M_4 = (ms_1)^4.mn_4 + mn_1.ms_4 + 4ms_1.ms_3.mn_2 + 6(ms_1)^2.ms_2.(mn_1.mn_2 + mn_3) +$$
$$3[(ms_2)^2].[(mn_1)^2 - mn_1 + mn_2]$$

حيث إن :

M_1 هي العزم الأول المركب

1-Hon-Shiang Lau," An Effective Approach For Estimating The Aggregate Loss Of An Insurance Portfolio." Journal of Risk and Insurance,vol.3.1986.p 24.

M_2 هي العزم الثاني المركب

M_3 هي العزم الثالث المركب

M_4 هي العزم الرابع المركب

وسـوف يـتم اسـتخدام العزوم الأربعة المركزية لحساب معامل الالتواء ، ومعـامل التفرطح [1] في تحديد قيمة معامل بيرسون ، من أجل تحديد التوزيع المركـب الـناتج مـن دمـج التوزيعين المتقطع مع المستمر ،وذلك باستخدام المعادلة التفاضلية لكارل بيرسون [2] :-

$$\boxed{K = \frac{\beta_1(\beta_2+3)^2}{4[(2\beta_2-3\beta_1-6)(4\beta_2-3\beta_1)]}}$$

حيث إن مقياس الالتواء هو

$$\beta_1 = \frac{M_3}{(M_2)^{1.5}}$$

ومعامل التفرطح هو

$$\beta_2 = \frac{M_4}{(M_2)^2}$$

وتتسم طريقة بيرسون بتحديد نوع التوزيع للبيانات محل الدراسة، وتأخذ قيمة معامل بيرسون عدة قيم تستخدم في تحديد نوع التوزيع وهى :-

1-إذا كانـت قـيمة معامل بيرسون سالبة $K < 0$ فإن البيانات تتبع توزيع بيتا.

2-إذا كانـت قيمة معامل بيرسون أقل من الواحد الصحيح $K < 1$ فإن البيانات تتبع توزيع مقلوب جاما

(1)-Tomas A.Aluppa, " Evaluation of Person Curves As an Approximation of the Maximum probable annual Aggregate Loss.0"Journal of Risk and Insurance ,vol 3,1988,p.440.

(2) Norman L.Johnson ,Samuel Kotz ,"Continuous univariate distributions", A Wiley interscience publication ,John Wiley &Sons,New York , 1970, pp. 9-15.

3-إذا كانـــت قـــيمة معامل بيرسون تنحصر مابين الصفر والواحد الصحيح $0 < K < 1$ فإن البيانات تتبع توزيع جاما

وقـــبل تقديـــر الـــتوزيع المركب الثنائي يجب تقدير العزوم المركزية الأربعة للتوزيعات الاحتمالية الثنائية كالتالي:-

2- تقدير معالم التوزيعات الاحتمالية الثنائية

فـــي هـــذا المبحـــث يتم تقدير معالم التوزيعات المركبة من التوزيعات التي تم اختـــبارها بـــناء علـــي اختـــبارات جودة المطابقة ، ولتحديد معالم التوزيعات الاحتمالـــية ســـيتم استخدام العزوم المركزية حول الوسط الحسابي للتوزيعات المـــتقطعة والمســـتمرة والتي تم آنفاً اختبار جودة مطابقتها لها لعدد الحوادث وحجم الخسائر للأخطار الثلاثة (الحريق- والسيارات -والنقل البحري).

أولاً : العزوم المركزية الأربعة لخطري الحريق والسيارات

(أ) العزوم المركزية الأربعة لعدد الحوادث لخطري الحريق والسيارات

وبدمـــج توزيـــع بواسون مع توزيع ذي الحدين السالب تكون λ معلمة توزيع بواســـون $(\lambda = 21.11111)$ ، معلمـــتا توزيـــع ذي الحدين السالب هما $r = 1$, $p= 0.0175953$، ومتوسط توزيع ذي الحدين السالب

$$Mean\ N.B = 55.833$$

ولـــتقدير العزوم الأربعة المركزية [1] لتوزيع (بواسون مع ذي الحدين السالب) ومن خلال دالة كثافة الاحتمال بالمعادلة (10).

$$p_3(z) = e^{-\lambda} p q^z e^{w_1} ppois(z, w_1) \quad ; w_1 = \lambda / q$$

وباستخدام الحزمة الإحصائية mathcad والرمز للتوزيعات المتقطعة بالرمز n والتوزيعات المتصلة بالرمز s يمكن التأكد من أن الدالة احتمالية من خلال mathcad

(1) - عبد الله توفيق الهلباوي ،" مرجع سابق ، ص.108.

، وبالجمع علي حدود الدالة $p_3(z)$ ، وبمساواة الدالة بالواحد الصحيح

$$\sum_{z=0}^{1000} p_3(z)=1$$

فإن العزم الأول لتوزيع (بواسون مع ذي الحدين السالب) يكون كما يلي:

العزم الأول المركزي (mn_1) :-

$$mn_1=\sum_{z_1=0}^{1000} z.p_3(z) \quad \therefore mn_1=76.944$$

mn_1 يمثل العزم الأول الناجم من دمج توزيعي بواسون مع ذي الحدين السالب

والعزم الثاني المركزي (mn_2) :-

$$mn_2=\sum_{z_1}^{1000}(z-mn_1)^2.p_3(z) \quad \therefore \quad mn_2=3.194*10^3$$

والعزم المركزي الثالث (mn_3) :

$$mn_3=\sum_{z_1}^{1000}(z-mn_1)^3.p_3(z) \quad \therefore mn_3=3.575*10^5$$

والعزم المركزي الرابع (mn_4) :

$$mn_4=\sum_{z_1}^{1000}(z-mn_1)^4.p_3(z) \quad \therefore mn4=9.1*10^7$$

(ب) العزوم المركزية الأربعة لحجم الخسائر لخطري الحريق والسيارات

بالنسبة لخطر الحريق تم التوصل من قبل إلي أن البيانات الفعلية تتبع التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي ، وأن متوسط هذه البيانات الفعلية هو $\mu=6664.51$ ، والانحراف المعياري لها $\sigma=4178.83$ ،بالتالي فإن معالم التوزيع

اللوغاريتمي الطبيعي هي:

$$\mu = e^{\mu+\frac{1}{2}\sigma^2} = 6664.51 \;......................(1)$$

$$\text{var} = e^{2\mu+\sigma^2}(e^{\sigma^2}-1) = 17462620.17.........(2)$$

وبقسمة المعادلة الثانية علي مربع المعادلة الأولي.

$$e^{\sigma^2} - 1 = 0.393163289$$

$$e^{\sigma^2} = 1.393163289$$

وبأخذ اللوغاريتم الطبيعي للطرفين ينتج

$$\sigma^2 = 0.331576909 \; ; \sigma = 0.0576$$

بالتعويض في المعادلة (1) بقيمة $\mu = 8.639$

أمـــا بالنســـبة لخطر السيارات أمكن التوصل من خلال جودة المطابقة إلي أن البيانات الفعلية تخضع للتوزيع النظري وايبل ، وأن تقديرات البيانات الفعلية
shape=1.7095 , scale=62870.3

حيث أن shape ,scale هي معالم توزيع وايبل كالآتي:-

$$\eta = scale \quad , \beta = shape \quad , \quad \eta = 62870.3 \quad ,\beta = 1.7095$$

وأن متوسط توزيع وايبل [5] كالتالي:

$$Mean = \eta\Gamma\left(\frac{1}{\beta}+1\right) \qquad \therefore \text{Mean Wei}=5.607*10^4$$

فـــي ضوء ماسلف يمكن تقدير العزوم المركزية الأربعة للتوزيع (اللوغاريتمي الطبيعـــي- وايبل) كما يلي باستخدام دالة كثافة الاحتمال للتوزيع اللوغاريتمي الطبيعي مع وايبل

2-MERRAN EVANS,NICHOLAS HASTINGS, BRIAN PEACOCK(2000). Statistical Distribution Third Edition .JOHN WILEY&SONS,INC. P. 193.

$$g(z)=A_2\int_0^z \frac{(z-u)^{\beta-1}}{u} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln u-\mu)^2-(\frac{z-u}{\eta})^\beta} du$$

$$A_2=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma}\frac{\beta}{\eta^\beta}$$

ويمكــن الــتأكد مــن أن الدالة احتمالية من خلال التكامل المحدود علي حدود المتغير z وذلك بمساواة المعادلة بالواحد الصحيح.

$$\int_0^{10000000} g(z)dz=1$$

نجد أن العزم المركزي الأول

$$ms_1=\int_0^{10000000} z.g(z)dz \quad \therefore ms_1=6.274*10^4$$

والعزم المركزي الثاني

$$ms_2=\int_0^{10000000}(z-ms_1)^2.g(z)dz \quad \therefore ms_2=1.159*10^9$$

والعزم المركزي الثالث

$$ms_3=\int_0^{10000000}(z-ms_1)^3.g(z)dz \quad \therefore ms_3=3.317*10^{13}$$

والعزم المركزي الرابع

$$ms_4=\int_0^{10000000}(z-ms_1)^4.g(z)dz \quad \therefore ms_4=5.006*10^{18}$$

ثانياً:العزوم المركزية الأربعة لخطري الحريق والبحري

(أ) العزوم المركزية الأربعة لعدد الحوادث لخطري الحريق والنقل البحري.

حيــث إن البــيانات الفعلية لعدد الحوادث لخطر الحريق تتبع توزيع بواسون، (انظر المبحث السابق) ، والبيانات الفعلية لخطر النقل البحري تتبع توزيع ذي الحديــن السالب ، وبدمج هذين التوزيعين اتضح لنا أن معلمة توزيع بواسون (المتوسط) $\lambda = 21.11111$ ، ومعلمتا توزيع ذي الحدين السالب هما $r = 1$, $p=0.0128169$ ومتوسط الخسارة المتوقعة لتوزيع ذي الحدين السالب

$$Mean\ N.B = 34.5$$

ومــن ثــم تقديــر العزوم الأربعة المركزية للتوزيع (بواسون مع ذي الحدين السالب) تستخدم دالة كثافة الاحتمال (المعادلة (10)) :-

$$p_3(z_1) = e^{-\lambda} p q^{z_1} e^{w_1} ppois(z_1, w_1) \quad ; \quad w_1 = \lambda / q$$

باســتخدام الحزمة الإحصائية mathcad والرمز للتوزيعات المتقطعة بالرمز n والــتوزيعات المتصــلة بالرمز s يمكن التأكد من أن الدالة احتمالية من خلال mathcad ، وبــالجمع علــي حدود الدالة $p_3(z_1)$ ، وبمساواة الدالة بالواحد الصحيح.

$$\sum_{z=0}^{1000} p_3(z_1) = 1$$

فإن العزم المركزي الأول $mn_1 = 55.611$

والعزم المركزي الثاني $mn_2 = 1.246 * 10^3$

والعزم المركزي الثالث $mn_3 = 8.575 * 10^5$

والعزم المركزي الرابع $mn_4 = 1.366 * 10^7$

(ب) العــزوم المركــزية الأربعــة لحجــم الخسائر لخطري الحريق والنقل الــبحري:-تم اختبار جودة المطابقة لخطر الحريق واتضح أن البيانات الفعلية لحجم الخسائر لخطر الحريق تتبع التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي وأن متوسط والانحراف المعياري $\sigma = 4178.83$ ، $\mu = 6664.51$ البيانات الفعلية هو

ويمكن تقدير معالم التوزيع (المتوسط والانحراف المعياري) كالتالي:

$\sigma = 0.0576$ ، $\mu = 8.639$

وباختـــبار جـــودة المطابقة للخطر البحري تبين أن البيانات الفعلية تتبع توزيع جامــــــا ، وأن تقديــــــرات البــــيانات الفعلـــــية shape=0.780837, scale=0.000001887073، حيــث أن scale, shape هـــي معـــالم توزيع جاما كالآتي $n = shape \quad , \theta = scale$

حيث إن

$$n = 0.780837$$

$$\theta = 0.00000188707$$

وإن متوسط توزيع جاما $Mean(gamma) = 4.138 * 10^5$

ومـــن ثم فإنه لتقدير العزوم المركزية الأربعة للتوزيع (اللوغاريتمي الطبيعي مـــع جاما) تستخدم دالة كثافة الاحتمال للتوزيع المركب اللوغاريتمي الطبيعي مع جاما التالية :

$$g(z) = A_1 \int_0^z \frac{(z-u)^{n-1}}{u} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(\ln u - \mu)^2 + \theta u} du \quad ; \; A_1 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \frac{\theta^n}{\Gamma(n)}$$

فإن العزم المركزي الأول $ms_1 = 4.204 * 10^5$

والعزم االمركزي الثاني $ms_2 = 2.193 * 10^{11}$

والعزم المركزي الثالث $ms_3 = 2.324 * 10^{17}$

والعزم المركزي الرابع $ms_4 = 5.137 * 10^{23}$

ثالثاً: العزوم المركزية الأربعة لخطري السيارات والبحري

(أ) العزوم المركزية الأربعة لعدد الحوادث لخطري السيارات والنقل البحري. تم في المبحث الثاني اختبارات جودة المطابقة لخطر السيارات لعدد

الحوادث وتبين أنها تتبع توزيع ذي الحدين السالب ، ومعلمتا هذا التوزيع هما
$p_1=0.0175953, r_1=1$ ، كما أن متوسطه $Mean\ N.B_1 = 55.833$
وأيضـــاً تبين من خلال اختبارات جودة المطابقة لخطر النقل البحري أنه يتبع
توزيـــع ذي الحدين السالب ومعلمتا هذا التوزيع هما $p_2 = 0.028169,\ \ r_2 = 1$
كما أن متوسطه $Mean\ N.B_2 = 34.5$
ومـــن ثم فإنه لتقدير العزوم الأربعة المركزية للتوزيع (ذي الحدين السالب مع ذي الحديـــن الســـالب) تستخدم دالة كثافة الاحتمال الناجمة من دمج التوزيعين معاً المعادلة (18).

$$p_3(z) = p_1 q_2 q_2^z \left[\frac{(w_2)^{z+1} - 1}{w_2 - 1}\right]$$

وبالتالي فإن العزم المركزي الأول $mn_1 = 90.333$

والعزم المركزي الثاني $mn_2 = 4.398*10^3$

والعزم المركزي الثالث $mn_3 = 4.432*10^5$

والعزم المركزي الرابع $mn_4 = 1.274*10^8$

(ب) العـــزوم المركـــزية الأربعـــة لحجـــم الخسائر لخطري السيارات والنقل البحري.

تم اختبار جودة المطابقة لخطر السيارات واتضح أن البيانات الفعلية لحجم الخسائر تتبع توزيع وايبل . وأن تقديرات البيانات الفعلية shape=1.7095 ، scale=62870 ، وأن متوسط توزيع وايبل Mean Wei=$5.607*10^4$
وكذلـــك تـــم اختبار جودة المطابقة للخطر البحري، وتبين أن تقديرات البيانات الفعلـــية للـــبحري تتـــبع توزيـــع جامـــا ، وأن تقديـــرات البـــيانات الفعلـــية shape=0.780837 , scale=0.000001887073

حيث إن

$$n = 0.780837$$
$$\theta = 0.00000188707$$

وأن متوسط توزيع جاما $Mean(gamma) = 4.138*10^5$

ومن ثم فإنه لتقدير العزوم المركزية الأربعة للتوزيع (وايبل - جاما) تستخدم دالة كثافة الاحتمال للتوزيع وايبل مع جاما التالية :-

$$g(z) = A_3 e^{-\theta z} \int_0^z (z-u)^{n-1} u^{\beta-1} e^{-\theta u-(u/\eta)^\beta} du \quad ; A_3 = \frac{\beta}{n^\beta} \frac{\theta^n}{\Gamma(n)}$$

العزم المركزي الأول $ms_1 = 4.699*10^5$

والعزم المركزي الثاني $ms_2 = 2.204*10^{11}$

والعزم المركزي الثالث $ms_3 = 2.324*10^{17}$

والعزم المركزي الرابع $ms_4 = 5.152*10^{23}$

من خلال العرض السابق في هذا المبحث تم استنتاج العزوم المركزية الأربعة لعدد الخسائر وحجمها ، وذلك للأخطار الثنائية ، واستخدام هذه العزوم الأربعة ، ومعامل الالتواء والتفرطح ، ثم بالتعويض في المعادلة التفاضلية لبيرسون لاستنتاج التوزيع المركب الناتج من دمج التوزيعات الاحتمالية المتقطعة مع المستمرة سواء كانت توزيعات ثنائية ،كما سيتم بيانه في السطور القادمة .

3- التوزيع المركب الثنائي

(أ) التوزيع المركب الثنائي لخطري الحريق والسيارات

لتحديد التوزيع المركب الناتج من دمج توزيعين متقطعين (بواسون مع ذي الحدين السالب)، وتوزيعين متصلين (اللوغاريتم الطبيعي مع وايبل) مع الأخذ في الاعتبار معامل الالتواء ومعامل التفرطح ، والعزوم

الأربعة المركبة تم التعويض في المعادلة التفاضلية لبيرسون وحساب قيمة معامل الالتواء والتفرطح يمكن تحديد نوع التوزيع كالآتي:-

*العزم الأول المركب $M_1 = 4.827*10^6$

* العزم الثاني المركب $M_2 = 1.266*10^{13}$

* العـــزم الثالث المركب $M_3 = 8.899 * 10^{19}$

* العزم الرابع المركب $M_4 = 1.427 * 10^{27}$

مقياس الالتواء $\beta_1 = 1.975$

معامل التفرطح $\beta_2 = 8.897$

وبالتالي فإن قيمة معامل بيرسون في المعادلة التفاضلية لبيرسون $k = 0.401$ ، حيث إن القـــيمة تنحصر بين الصفر والواحد الصحيح لذا فإن الدالة الاحتمالية علي شكل دالـــة جامـــا.، وتكون دالة كثافة الاحتمال PDF لدالة توزيع جاما علي النحو التالي

$$\boxed{f(T) = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} T^{n-1} e^{-\theta T}}$$

ومعالم هذا التوزيع هي n, θ

(ب) التوزيع المركب الثنائي لخطري الحريق مع البحري

وباســـتخدام العـــزوم الأربعـــة المركـــبة لإيجـــاد التوزيع المناسب للتوزيعين المتقطعيـــن (بواســـون / ذي الحدين السالب) ، والتوزيعين المتصلين (جاما / اللوغاريتمي الطبيعى) هي :

العزم المركب الأول $M_1 = 2.338 * 10^7$

العزم المركب الثاني $M_2 = 2.324 * 10^{14}$

العزم المركب الثالث $M_3 = 6.731 * 10^{21}$

العزم المركب الرابع $M_4 = 4.64 * 10^{29}$

مقياس الالتواء $\beta_1 = 1.9$

مقياس التفرطح $\beta_2 = 8.589$

نجـد أن قـيمة K هـي $K = 0.406$ حيث إن القيمة تتراوح مابين الصفر والواحد الصحيح ، لذا فإن الدالة الاحتمالية علي شكل دالة جاما.

(ج) التوزيع المركب الثنائي لخطري السيارات مع البحري

باستخدام العـزوم الأربعـة المركـبة لإيجـاد التوزيع المناسب للتوزيعين المتقطعيـن(ذي الحديـن السـالب/ذي الحديـن السـالب) ، والتوزيعيـن المتصلين(جاما/وايبل) وهي .

العزم المركب الأول $M_1 = 4.244 * 10^7$

والعزم المركب الثاني $M_2 = 9.908 * 10^{14}$

والعزم المركب الثالث $M_3 = 4.736 * 10^{22}$

اولعزم المركب الرابع: $M_4 = 6.458 * 10^{30}$

مقياس الالتواء $\beta_1 = 1.519$

ومعامل التفرطح $\beta_2 = 8.589$

نجد أن قيمة K هي $K = 0.615$

حيـث إن القـيمة تـتراوح مابيـن الصـفر والواحد الصحيح ، وتكون الدالة الاحتمالية علي شكل دالة جاما .

ونخلـص ممـا سـلف إلـي أن التوزيع الاحتمالي المركب والناجم من دمج التوزيعات الاحتمالية المتقطعة والمستمرة الثنائية يتمثل في دالة احتمالية علي شكل دالة جاما وهي :-

$$\boxed{f(T) = \frac{\theta^n}{\Gamma(n)} T^{n-1} e^{-\theta T}}$$

وهذا يعزي إلي أن قيمة K في المعادلة التفاضلية لبيرسون تنحصر بين الصفر والواحد الصحيح أي أن $(1 \text{ f } K \text{ f } 0)$

والجديـــر بالذكر أن الدالة الاحتمالية السالفة سوف تستخدم في عملية التسعير للوثيقة المركبة كما سيتضح في المبحث القادم.

المبحث الرابع

تسعير أخطار الشركات الصناعية

يعــد التسعير في صناعة التأمين من مقدمة العمليات التي تسبق عملية إصدار أي نــوع من أنواع وثائق التأمين ، ولاسيما في التأمينات العامة ، ولهذا تعتبر الخطوة الأساسية في تسعير الوثيقة المركبة.

كما أن ازدهار صناعة التأمين أو تدهورها مرتبط بمدى سلامة عملية التسعير ، ولعــل أول الأغــراض التــي تحققها نظرية الخطر هو التوصل إلى أساس اكــتوارى مناســب يعــتمد على نماذج كمية وتوزيعات احتمالية مقنعة لعملية التسعير.

عــلاوة علــي ذلك فالمبرر الأساسي لاستخدام التوزيعات الاحتمالية في عملية التســعير هو الاستفادة من بيانات الماضي في توصيف الظاهرة محل الدراسة وبــناء نموذج كمي يكون أكثر شمولاً ، وعلي درجة عالية من الدقة في تقدير القــيمة المتوقعة للمتغير العشوائي محل الدراسة ، وكذلك تباينه تمهيداً لعملية التســعير ، والجديــر بالذكــر أن عمليه تسعير الوثيقة المركبة ذات الأخطار الثلاثة(الحريق – والسيارات – و النقل البحري) ستتم كالتالي:

أولاً : تسعير كل خطرين معاً

ثانــياً :مقارنــة أســعار التأميــن التجاري بالوثيقة المركبة بمثيلاتها للوثائق الفردية.

ولكــي يتم تسعير الوثيقة المركبة يقتضي تحديد قسط الخطر (القسط الصافي) وهــو القســط الذي يدفع لتغطية التكلفة المتوقعة للخطر فقط ، متجاهلا أعباء القســط كمصــروفات الإصــدار وأعباء الطوارئ والمصروفات الأخرى[1] ،

---

[1]Hossack, I. B. "Introductory statistics with applications in general insurance", *Cambridge university press*, p 122,1999.

ويـــتحدد قسط الخطر (القسط الصافي) عن طريق تقدير معدل تكرار المطالبة، ومتوســـط حجم المطالبة، حيث إ ن قسط الخطر عبارة عن حاصل ضربهما، وبافـــتراض أن عدد المطالبات وحجمها مستقلان ،ومن ثم فإن القسط التجاري يتحدد كما يلي [1] :

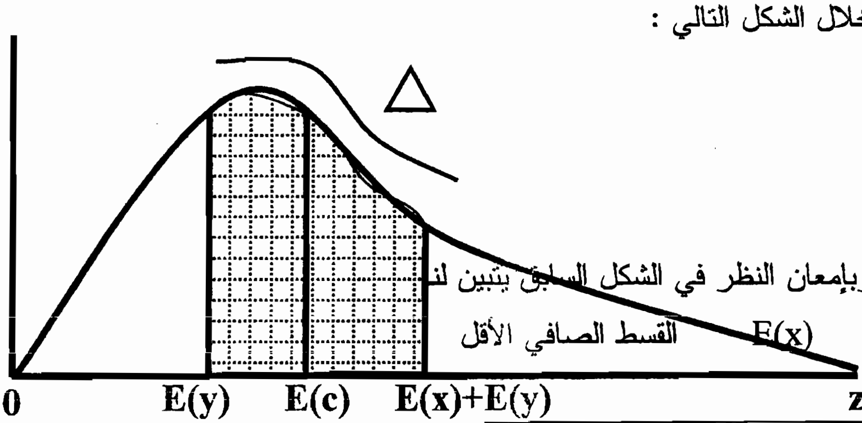
$$GP = \frac{p}{1-\pi} \quad ; \pi = a + b \quad ; \pi < 1$$

أولاً : تسعير كل خطرين معاً

يتم تسعير كل خطرين معاً من الأخطار الثلاثة (الحريق –والسيارات –والنقل البحري) كالتالي:

أ- خطر الحريق والسيارات:

فـــي بداية هذا المبحث تم حساب القسط الصافي والتجاري لكل خطر على حدة ، ومـــن ثم يمكن حساب القسط الصافي والتجاري لخطري الحريق والسيارات معـــاً.،والجدير بالذكر أن القسط الصافي للخطرين معاً يكون أقل من مجموع القسطين (القسط الصافي الأصغر+ القسط الصافي الأكبر) ، وأكبر من القسط الصـــافي الأكبر (باعتبار شراء كل خطر علي حدة) ، ويمكن توضيح ذلك من خلال الشكل التالي :



وبإمعان النظر في الشكل السابق يتبين لنا

[1] George E. Rejda, "Principles of risk management and insurance", Seventh Edition, Addison. Wesley, London,p610, 2000.

E(y) القسط الصافي الأكبر

E(x)+E(y) مجموع القسطين باعتبار شراء كل خطر علي حدة

Δ الفرق بين مجموع القسطين و القسط الأكبر

E(c) القســط الصــافي للخطريــن معاً والمطلوب تقديره ، والذي ينحصــر بيــن أكبر قسط ومجموع القسطين لكل خطر علي حدة.

α الوســط الحســابي المرجح **(معامل الترجيح α)** ،وهو عبارة عــن معــدل الخسارة مرجحاً بالقيمة المتوقعة لكل من الخطرين ، ونظراً لاختلاف كل خطر عن الآخر وعدم وجود التجانس بينهما ، ومن ثم يمكن حسّــاب معــامل الترجــيح للخطرين معا (الحريق والسيارات) من خلال تطبيق المعادلة الآتية :

$$\text{معامل الترجيح} = \frac{\text{القيمة المتوقعة لخطر الحريق} * \text{معدل الخسارة لخطر الحريق} + \text{القيمة المتوقعة لخطر السيارات} * \text{معدل الخسارة لخطر السيارات}}{\text{القيمة المتوقعة لخطر الحريق} + \text{القيمة المتوقعة لخطر السيارات}}$$

مما سلف يمكن إيجاد القسط الصافي للخطرين معاً من خلال المعادلة الآتية:

$$\int_{0}^{E(C)} f(z)dz = \int_{0}^{E(y)} f(z)dz + \alpha\Delta$$

$$\Delta = \int_{E(y)}^{E(x)+E(y)} f(z)dz$$

$$\Delta = \int_{0}^{E(x)+E(y)} f(z)dz - \int_{0}^{E(y)} f(z)dz$$

وقــد تم التوصل للتوزيع الاحتمالي المركب في الميحث السابق ، والناتج من دمج خطري الحريق مع السيارات واتضح أن قيمة المعادلة التفاضلية لبيرسون

K=0.401 ، مما يؤكد أن التوزيع الناتج المركب عبارة عن توزيع جاما ودالة كثافة الاحتمال الناتجة هي :

$$f(T)=\frac{\theta^n}{\Gamma(n)}T^{n-1}e^{-\theta T}$$

فضلاً عن ذلك فقد تم حساب العزمين الأول والثاني(M_1,M_2) وهما:

$M_1=4.827*10^6$

M2=1.266*1013

وحيث إن $M_1=\frac{n}{\theta}\ ;M_2=\frac{n}{\theta^2}\ ,\therefore\ \theta=3.812*10^{-7}$

لذا فإن $n=M_1*\theta$, n =1.84

وبالتالي فإن القسط الصافي الأقل(خطر الحريق)

E(x)=(Mean Poisson)(Mean lognormal) , $E(x)=1.407*10^5$

والقسط الصافي الأكبر(خطر السيارات)

E(y)=(Mean N.B)(Mean weibull) , $E(y)= 3.131*10^6$

ومعامل الترجيح $\alpha = 0.500991769$

وبالتالـــي يمكن تقدير القسط الصافي عند شراء وثيقة تغطي الخطرين معاً من خلال البرنامج الإحصائي MathCAD بالقيمة التالية:

$E(c)= 3.201032*10^6=3201032$

وهذا الناتج هو القسط الصافي عند شراء الخطرين معاً ، أما القسط التجاريلخطري الحريق والسيارات يتم حسابه كالتالي (GP=P/(1-(a+b)

GP=3201032/0.8153=3926201.398

كذلــك سعر التأمين التجاري يتم حسابه عن طريق قسمة القسط التجاري علي مبلغي التأمين لخطري الحريق والسيارات

r = 3926201.398/488594000= 0.0080357 =0.804 %

فضـــلاً عن ذلك فعند قيام المستأمن بشراء وثيقة تغطي الخطرين معاً فيحق له الحصول علي خصم ويتم حساب نسبته من خلال المعادلة التالية :

$$\text{نسبة الخصم } (d) = 1 - \frac{\text{القسط الصافي للخطرين معاً}}{\text{مجموع القسطين باعتبار شراء كل خطر علي حدة}}$$

أي أن نسبة الخصم الإجمالي للخطرين معا هي $d = 2.155\%$

ب- خطر الحريق مع خطر النقل البحري:

مـــن خلال المبحث السابق تم حساب قيمة المعادلة التفاضلية لبيرسون الناتجة من دمج خطري الحريق والنقل البحري وكانت $k=0.406$ ، وبالتالي التوزيع الاحتمالـــي المركب عبارة عن توزيع جاما،وتم حساب العزم المركب الأول ، والعزم المركب الثاني ، فضلاً عن معالم توزيع جاما المركب هي $n=2.352$ ، $\theta=1.006*10^{-7}$ ، وبالتالي فإن

القسط الصافي الأقل (خطر الحريق) $E(x)=1.407*10^{5}$ والقسط الصافي الأكبر(خطر النقل البحري) $E(y)= 1.427552*10^{7}$ ، ومجموع القسطين باعتبار شراء كل خطر علي حدة $(E(x)+E(y))=14416220$

ومعامل الترجيح للخطرين معاً $\alpha=0.268052005$

وبحســـاب قـــيمة **القسط الصافي للخطرين معًا** من خلال البرنامج الإحصائي MathCAD نجد أن $E(c) =14313212.34$

وهو أقل من مجموع القسطين باعتبار شراء كل خطر على حدة .

وبالمقارنة نجد أن الفرق بين مجموع القسطين باعتبار شراء كل خطر علي حده، والقسط الصافي للخطرين معاً هو103007.66 ، ومن ثم فإن القسط التجاري لخطري الحريق والنقل البحري يمكن حسابه كالتالي :

$$GP=17555761.49$$

أمـــا ســـعر التأمين التجاري يتم حسابه عن طريق قسمة القسط التجاري علي مبلغي التأمين لخطري الحريق والنقل البحري $r=0.497\%$

ويمكن للمؤمن له أن يمنح خصما إجماليا عند شرائه الخطرين معا
$d = 7.144*10^{-3}\%$

ج-خطر السيارات مع خطر النقل البحري:

تـم التوصل سابقا إلي أن المعادلة التفاضلية لبيرسون $k = 0.615$ ، والناجمة مـن دمـج الـتوزيع المركب لخطري السيارات و النقل البحري ، وهذه القيمة تنحصـر مـا بين الصفر والواحد الصحيح ، وبالتالي يكون التوزيع المركب الـناتج هـو توزيع جاما ،ومعلمتا هذا التوزيع هما θ، n ومن خلال الاعتماد علـى العـزم الأول المركب ، والعزم الثاني المركب يمكن تقدير قيم معلمتي التوزيع $n=1.818$، $\theta = 4.284*10^{-8}$

والقيمة المتوقعة (القسط الأقل) أو الناتج من حاصل ضرب متوسط توزيع ذي الحدين السالب ومتوسط توزيع وايبل هو

$E(x) = (\text{Mean N.B})(\text{Mean Weibull}) = 3.130838333*10^{7}$

والقسـط الأكـبر وهـو عبارة عن حاصل ضرب متوسط توزيع ذي الحدين السالب ومتوسط توزيع جاماهو $E(y) = 1.427551196*10^{7}$

وبالتالي مجموع القسطين باعتبار شراء كل خطر على حدة

$E(x) + E(y) = 1.7406350*10^{7}$

وبنفس الأسلوب السابق يمكن استنتاج قيمة معامل الترجيح

$\alpha = 0.314714708$

ومن ثم تكون قيمة **القسط الصافي للخطرين معًا** من خلال البرنامج الإحصائي MathCAD هي $E(c) = 1.5270930*10^{7}$

مما يحقق وفراً في القسط بمقدار $2.135420*10^{6}$ جنيه ويتم حساب القسط التجاري لخطري السيارات والنقل البحري كالتالي

$GP = 18730442.78$

وبالتالـي يمكـن حسـاب سـعر التأمين التجاري ، عن طريق قسمة القسط التجاري علي مبلغي التأمين لخطري السيارات والنقل البحري $r = 0.592\%$

ويمكن للمؤمن له أن يمنح خصما إجماليا عند شرائه الخطرين معا كالتالي

أي أن نسبة الخصم الإجمالي للخطرين معا $d = 12.3\%$

وخلاصة مما سلف أن أسعار التأمين التجاري لكل خطرين معاً تتضح من الجدول التالي :

جدول رقم(8)

أسعار التأمين التجاري لكل خطرين معاً

من أخطار الحريق والسيارات والنقل البحرى

البيان / نوع الخطر	مبالغ التأمين	القسط الصافي للخطرين معاً	القسط التجاري	سعر التأمين التجاري
الحريق مع السيارات	488594000	3201032	3926201.398	0.804 %
الحريق مع النقل البحري	3535278867	143123212.34	17555761.49	0.497 %
السيارات مع النقل البحري	3161572867	15270930	18730442.78	0.592 %

ثانياً: مقارنة أسعار التأمين التجاري بالوثيقة المركبة بمثيلاتها للوثائق الفردية

بناء علي ما تم التوصل إليه من تقديرات للسعر التجاري لكل من (خطر واحد- خطرين معاً) يجدر بنا أن نقف علي بعض الملاحظات التالية :-

1- نلاحظ من نتائج التحليل الإحصائي أن متوسط معدل الخسارة لكل من خطر (الحريق-والسيارات-والبحري) علي التوالي هى 8.98%، 51.95%، 26.98%.

2- أن متوسط معدل الخسارة لخطر السيارات أكبر من متوسط معدل الخسارة لكل من خطري الحريق والبحري، مما أثر في ارتفاع سعر التأمين التجاري لذات الخطر.

3- مــن خــلال هــذا المبحث، أمكن تحديد سعر التأمين التجاري لكل خطر ، وللخطريــن معــاً ، وللــثلاثة أخطـــار ،ويوضـــح الجدول الآتي أسعار هذه الأخطار:-

البيان	السعر	الخطرين معاً	السعر	نسبة الخصم
خطـــر الحريق	%0.040	الحـــريق والسيارات	%0.804	%2.155
خطـــر السيارات	%6.68	الحـــريق والبحري	%0.497	0.7144%
الخطـــر البحري	%0.564	السيارات والبحري	%0.592	%12.3

وباستقراء الجدول السابق يتضح الآتي:-

- زيـــادة ســـعر التأمين التجاري لخطر السيارات وهذا يعزي لارتفاع متوسط معدل الخسارة لنفس الخطر.
- قلة سعر التأمين التجاري لخطر الحريق وهذا يرجع لانخفاض متوسط معدل الخسارة.
- سعر التأمين التجاري للأخطار الثنائية أقل من مجموع سعري التأمين لكل خطر علي حدة، فعلي سبيل المثال نجد أن سعر التأمين التجاري لخطـــري الحـــريق والسيارات معاً بلغ 0.804% وهو أقل من مجموع سعري كل خطر علي حدة (6.72% =0.040 %+6.68%).
- أســـعار التأميـــن التجاري للأخطار الثلاثة أقل من مجموع كل خطر علي حده أو أسعار الأخطار الثنائية.
- هـــناك وفـــورات عديـــدة للأقساط ناجمة عن نسبة الخصم الممنوحة للمستأمن نتيجة لشرائه للخطرين معاً أو الثلاثة أخطار مجتمعة، فضلاً عـــن انخفاض المصروفات الإدارية ، وبالتالي تحسين قدرة المكتتبين علي القيام بالتسعير السليم.

- مـــن خلال الملاحظات سالفة الذكر نصل إلي نتيجة مؤداها أن أسعار شـــراء الوثـــيقة المركـــبة (متعددة التغطيات) هي الأفضل للمستأمن لانخفاض تكلفتها عن غيرها من الوثائق الفردية.
- أمـــا بالنســـبة للمؤمـــن فإن انتشار مثل هذا النوع من الوثائق يشجع المؤمـــن لهم علي اتخاذ وسيلة التأمين لإدارة الخطر ، مما يؤدي إلي زيـــادة عـــدد الوحـــدات المعرضـــة للخطـــر لدي شركات التأمين ، وانخفـــاض المصاريف الإدارية، وبالتالي توافر تطبيق قانون الأعداد الكبيرة،ويؤدي إلي رواج سوق التأمين.

النتائج والتوصيات

من خلال الدراسة التي قام بها الباحثون خلصوا إلي النتائج الآتية

1- أنه باختبار جودة المطابقة لأخطار وثيقة التأمين المركبة وجد ما يلي:

أ- أن عـــدد الحـــوادث الفعلية لخطر الحريق يخضع لتوزيع بواســـون ، أمـــا حجم الخسائر لنفس الخطر فيتبع التوزيع اللوغاريتمي الطبيعي

ب- أن عـــدد الحـــوادث لخطـــر السيارات يتبع توزيع ذي الحدين السالب، أما حجم الخسائر لنفس الخطر يتبع توزيع وايبل .

ج- أن عـــدد الحـــوادث لخطـــر النقل البحري يتبع توزيع ذي الحديـــن الســـالب ، أمـــا حجم الخسائر لنفس الخطر يتبع توزيع جاما.

2- أن أهـــم التوزيعات الاحتمالية المتصلة الشائعة الاستخدام في مجال التأمينات العامة ، هي توزيع جاما ، وتوزيع باريتو ، وتوزيع وايبل ، والـــتوزيع الأســـي ، والتوزيع اللوغاريتمي الطبيعي ، حيث تتسم بأنها منحنيات ملتوية جهة اليمين .

3- إن استخدام أسلوب التحويلات Transformations في استنتاج التوزيعات الاحتمالية الثنائية و الثلاثية لكل من التوزيعات الاحتمالية المتقطعة أو المستمرة قد يفيد كثيرا عند تسعير مجموعة من الأخطار يتم تغطيتها بوثيقة واحدة .

4- أنه من السهل باستخدام برنامج MathCAD التأكد من أن الدالة احتمالية لجميع التوزيعات الثنائية سواء لعدد الحوادث وحجم الخسائر حيث بمقتضي هذا البرنامج تبين أن :

أ- التوزيع الثنائي لعدد الحوادث لخطري الحريق و السيارات

$$\sum_{z=0}^{1000} p_3(z) = 1$$

ب- التوزيع الثنائي لحجم الخسائر لخطري الحريق و السيارات

$$\int_{0}^{1000000} g(z)dz = 1$$

ج- التوزيع الثنائي لعدد الحوادث لخطري الحريق مع النقل البحري

$$\sum_{z=0}^{1000} p_3(z_1) = 1$$

د- التوزيع الثنائي لحجم الخسائر لخطري الحريق والنقل البحري

$$\int_{0}^{1000000} g(z)dz = 1$$

ه- التوزيع الثنائي لعدد الحوادث لخطري السيارات و النقل البحري

$$\sum_{z=0}^{1000} p_3(z) = 1$$

و- التوزيع الثنائي لحجم الخسائر لخطري السيارات و النقل البحري

$$\int_{0}^{1000000} g(z)dz = 1$$

5- أن الــتوزيع المركــب لخطــري الحريق والسيارات أسفر عن قيمة معامل المعادلة التفاضلية لبيرسون k=0.401 ،وهذه القيمة تنحصر مابين الصفر والواحد الصحيح.

6- أســفرت الدراســة عــن قــيم المعادلة التفاضلية لبيرسون ،وذلك للأخطار المركبة الثنائية وكانت :

أ- المعادلـــة التفاضـــلية لبيرسون للتوزيع المركب لخطر الحريق والنقل البحري هي k=0.406 .

ب- المعادلـــة التفاضلية لبيرسون للتوزيع المركب لخطر السيارات والنقل البحري هي k=0.415 .

7- أن سعر التأمين التجاري لكل خطر علي حدة

اسم الخطر	سعر التأمين التجاري
الحريق	0.040%
السيارات	6. 684%
النقل البحري	0. 564%

8- أن سعر التأمين التجاري من خلال تسعير كل خطرين معاً

اسم الخطرين	سعر التأمين التجاري
الحريق مع السيارات	0.804 %
الحريق مع السيارات	0.497 %
السيارات مع النقل البحري	0.592 %

التوصيات

على ضوء ما سلف من النتائج التي تم التوصل إليها يوصي الباحثون التوصيات التالية :

1- محاولة استخدام نماذج التوزيعات الاحتمالية المركبة التي تم تحديدها في تسعير أخطار شركة مصر للغزل والنسيج ، والتي تم إعدادها في ضوء التحليل الإحصائي للبيانات ، والتي تؤدي إلي ارتفاع القوة التفسيرية للنموذج .

2- التوسع في إصدار وثائق تأمين مركبة ذات تغطيات متعددة تضم أكثر من خطر في كافة فروع التأمينات العامة نظراً لفوائدها لكل من طرفي التعاقد .

3- الاسترشاد بالأسعار المقترحة للوثائق المركبة التي توصل إليها الباحث من خلال(كل خطرين معاً) .

المراجع

المراجع العربية :

1- **إبراهـيم محمـد مهدي ، محمد توفيق البلقيني** ، "منهج كمي مقترح لتسـعير تأميـن أخطار النقل بالتطبيق علي أخطار النقل بهيئة السكك الحديدية المصرية" ، *المجلة العلمية بكلية الإدارة والاقتصاد* ، **جامعة قطر** ، 1992 .

2- **أمـير حـنا هرمـز** ،" الإحصاء الرياضي" ، *جامعة الموصل – العراق* ، 1990

3- **جلال مصطفي الصياد** ، "الاستدلال الإحصائي"، *جامعة الملك عبد العزيز* ، السعودية ،1993 .

4- **عبد الله توفيق الهلباوي** ،" مقدمة في نظرية الإحصاء "، *كلية التجارة – جامعة حلوان* ، 2003.

5- **عفـاف علـي حسن الدش** ، " الاستدلال الإحصائي " ، *كلية التجارة – جامعة حلوان* ، 2006 .

6- **ممـدوح حمزة أحمد** ، رياضيات التأمينات العامة ، *كلية التجارة* ، *جامعة القاهرة* ، 1994

7- **سـامية سعد زغلول شاهين** ، "نحو بناء نموذج لوثيقة تأمين ممتلكات شاملة" ، رسالة دكتوراه ، *كلية التجارة – جامعة المنصورة* ، 1994 .

8- **عماد عبد الجليل علي إسماعيل** ، "تسعير وثيقة التأمين الشاملة للفنادق والقرى السياحية" ، *كلية التجارة – جامعة القاهرة* ، عام 2005.

9- **محمـد غـازي صـابر** ، "تسـعير تأمين الحريق والانفجار في قطاع البترول وفق درجات الخطر في ج.م.ع" ، رسالة دكتوراه ، *كلية التجارة – جامعة القاهرة* ، 1998.

10- **محمـود سيد أحمد سالم** ، "المفاهيم العلمية لاتخاذ القرار في إدارة الأخطار مـع التطبيق على قطاع الغزل والنسيج في ج.م.ع" ، رسالة دكتوراه ، *كلية التجارة – جامعة أسيوط* ، 1984.

11- ممـــدوح حمزة أحمد ، "استخدام التوزيعات الاحتمالية فى تسعير التأمين مع التطبيق على تأمين السطو / محلات تجارية" ، رسالة دكتوراه ، *كلية التجارة – جامعة القاهرة ، 1990 .*

(د) أخري

1- الاتحاد المصري للتأمين ، شعبة الحريق .

2- وزارة التجارة والصناعة ، النشرة الاقتصادية الشهرية ، 2005.

3- سجلات شركة مصر للغزل والنسيج بالمحلة الكبرى خلال السنوات (1993 / 1994 – 2005 / 2006).

ثانياً : المراجع الأجنبية :

1- **George E. Rejda,** "Principles of risk management and insurance", Seventh Edition, *Addison. Wesley, London*, 2000.

2- **Hon-Shiang Lau,** "An Effective Approach For Estimating The Aggregate Loss Of An Insurance Portfolio." *Journal of Risk and Insurance,* vol. 3. 1986.

3- **Hossack, I. B.** "Introductory statistics with applications in general insurance", *Cambridge university press*, 1999.

4- **Jams S. Trieschmann and et.** "Commercial property Insurance and risk management". Fourth Edition, *American Institute*, 1994.

5- **Merran Evans, Nicholas Hastings, Brain, and Peacock,** "Statistical Distributions", *New York*, 2000.

6- **Michael A. Bean,** "probability The science of uncertainty with Applications to Investments, Insurance, and Engineering", Ph.D., FSA, *university of Western ontario*, 2002 .

7- **Norman L. Johnson, Samuel Kotz,** "Continuous univariate distributions", A Wiley Interscience publication, *John Wiley & Sons,* New York, 1970.

8- **Osman, Mohammed, A. M.** "A New approach To Automobile insurance Ratemaking by Quantitative Techniques" Ph.D. Dept of Mathematics, *The City University*, London, 1986

9- **Tomas A. Aluppa,** "Evaluation of Person Curves As an Approximation of the Maximum probable annual Aggregate Loss." *Journal of Risk and Insurance*, Vol 3, 1988.